Изборни предмет: <u>МАТЕМАТИКА</u> питања за завршни испит

<u>Пропорционалност</u>

1) Дванаест радника радећи по 8 часова дневно заради 120.000 динара.Колико часова треба да ради 10 радника да би зарадили 150.000 динара?

2) Радећи дневно по 8 часова, 21 радник за 6 дана изради 720 металних профила; за колико ће дана 28 радника, радећи по 7 часова израдити 1 260m металних профила?

3) 65 радника ископа неки канал за 23 дана. После 15 дана 13 радника напусти посао. Колико дана треба онима који су остали да заврше остатак посла?

4) Суму од 30400 динара поделити на 4 особе тако да делови стоје у размери: $b:d=1\frac{2}{3}:2, a:c=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}, a:d=\frac{5}{2}:2\frac{1}{3}$.

5) У извесну количину 80 % алкохола, додато је 12 литара воде и добијен је 60 % алкохол. Колика је првобитна количина алкохола?

6) Свеже грожђе садржи 80 % воде, а суво 12 % воде. Колико килограма свежег грожђа треба да би се добило 40 килограма сувог?

7) Цена кошуље је била 2200 динара. После поскупљења од 20 % дошло је до снижења од 20 %. Колика је сада цена?

8) Шестина робе је продата са зарадом од 30 %, а трећина са губитком од 30 %. Са колико % зараде треба продати остатак да би се покрио губитак?

<u>Бројеви, полиноми и алгебарски изрази</u>

9) Упростити израз: $\left[\left(1+\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1-\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}$.

10) Упростити израз: $\left(\left(\frac{3}{16}:\left(8+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right)^{-4}$.

11) Наћи вредност израза: $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ за $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ и $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$.

12) Упростити израз: $\frac{a^2+4a+4}{4a^2}:\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{a^2}\right)$.

13) Упростити израз: $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right):\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\right)$.

14) Наћи *a*, *b*, *c* тако да је: $6x^3-23x^2+29x-12=(x-1)\cdot\left(ax^2+bx+c\right)$

15) Одредити реалан параметар *m* тако да полином $P(x)=x^5+mx^3+3x^2-2x+8$ буде дељив са $x+2$.

16) Наћи *a*, *b* тако да полином $p(x)=ax^3+bx^2-5x+4$ дељењем са $x+2$ даје остатак -14, а са $x-1$ даје остатак -2.

17) Користећи Безуов став раставити на чиниоце полином: $P(x)=x^3-2x^2-x+2$

Изборни предмет: <u>МАТЕМАТИКА</u> питања за завршни испит

Квадратна једначина и неједначина

18) Решити једначину: $\frac{34}{4x^2-1}+\frac{2x+1}{1-2x}=\frac{2x-1}{1+2x}$.

19) Решити једначину: $\frac{a+6b}{x+3b}-\frac{a-6b}{x-3b}=\frac{6b}{a}$.

20) За које вредности параметра $k \in R$ једначина $\mathrm{kx}^2+(\mathrm{k}+1)\mathrm{x}+2=0$ има двоструко решење?

21) За које вредности параметра $m \in R$ једначина $(2\mathrm{m}+1)\mathrm{x}^2-(2\mathrm{m}+1)\mathrm{x}+2{,}5=0$ има реална и различита решења?

22) У једначини $mx^2-(3m+1)x+m=0$ одредити вредност реалног параметра *m* тако да важи: $x_1+x_2=5$.

23) Одредити вредност реалног параметра *k* тако да у једначини : $x^2-4x+(3k-1)=0$ важи $x_1-x_2=3$.

24) У једначини $x^2-(m+1)x+m=0$ одредити вредност реалног параметра *m* тако да важи: $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=10$.

25) Скратити разломак: $\frac{x^2-4ax+3a^2}{x^2-\left(a+3\right)x+3a}$

26) Одредити $p \in R$, тако да решења квадратне једначине $x^2-6x+p=0$ буду позитивни бројеви.

27) Наћи скуп свих вредности параметра m за које су корени квадратне једначине $(m-2)x^2-2mx+2m+2=0$ реални, различити и позитивни.

28) Наћи скуп свих вредности реалног параметра *a* за које су решења квадратне једначине $x^2-(a+2)x+a+5=0$ негативна.

29) Решити систем једначина: $x^2+y^2=34$, $xy=-15$.

30) Решити неједначину: $\frac{-x^2+6x+1}{x^2-2x-8}\le -2$.

31) Решити неједначину: $\frac{7}{x^2-5x+6}+\frac{9}{x-3}<-1$.

32) Решити једначину: $\sqrt{3x+13}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+3}$.

Експоненцијална једначина и неједначина

33) Решити једначину: $4^x-3^{x-2}=5\cdot 3^{x-1}+4^{x-1}$

34) Решити једначину: $3^{x+2}+9^{x+1}=810$ у скупу реалних бројева.

35) Решити једначину: $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

36) Решити систем једначина: $x+y=3, |x|^{x^2-y^2-6}=1$.

37) Решити неједначину: $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-6x} > 9$.

38) Решити неједначину: $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} < 64$.

Логаритамска једначина и неједначина

39) Израчунати: $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$

40) Израчунати: $\log_7 \log_2 \log_2 \log_3 81$.

41) Ако је $\log_{10} 5 = a, \quad \log_{10} 3 = b$ наћи $\log_{30} 8$.

42) Одредити вредност израза $\log_{\frac{1}{9}}\left(\log_2 \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{1}{2}} 8\right)$.

43) Решити једначину $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$ у скупу реалних бројева.

44) Решити једначину: $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{0,2} \sqrt{3}$.

45) Наћи скуп свих решења једначине $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$.

46) Наћи збир свих решења једначине $x^{1+\log_2 x} = 4$.

47) Решити неједначину: $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 2$.

48) Решити неједначину: $\log_9(25 - x^2) > 1$.

Тригонометрија

49) Израчунати вредност израза: $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$.

50) Ако је $tg\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$, наћи $tg\alpha$.

51) Доказати идентитет $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{1 + 2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot (tg^2\alpha - 1)} = \frac{2}{1 + tg\alpha}$

52) Написати сва решења једначине $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

53) Решити једначину $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

54) Решити једначину $\cos x + \cos 5x + \cos 9x = 0$

55) Решити једначину $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

56) Решити једначину $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$

57) Решити једначину $\sin\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

Изборни предмет: <u>МАТЕМАТИКА</u> питања за завршни испит

Комплексни бројеви

58) Наћи вредност израза: $\frac{i^{1998}+i^{1997}}{i^{1996}-i^{1995}}$.

59) Наћи комплексан број $z = x + yi$ тако да важи: $|z-2i| = |z|$ и $|z-i| = |z-1|$.

60) Дат је полином $f(z) = -z^3 + 3z^2 + z + 2$. Ако је $z = 3 + 2i$, наћи $f(\bar{z})$.

61) Ако је $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+1}$, наћи z^{60}.

62) Наћи $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1996} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1996}$

63) Решити једначину $x^4 = 1$.

64) Решити једначину: $z^3 - 27i = 0$.

Биномни образац

65) Збир прва три коефицијента развоја $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ је 46. Наћи члан развоја који не садржи *x*.

66) Наћи $n \in N$ тако да је збир коефицијената другог и трећег члана у развоју $\left(\sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^n$ једнак 153. За такво *n*, одредити члан који не садржи *x*.

67) Разлика биномних коефицијената трећег и другог члана у развијеном облику бинома $\left(\frac{1}{a} + a\sqrt{a}\right)^n$ једнака је 5. Наћи члан који не садржи *x*.

Комбинаторика

68) Одредити број различитих природних бројева мањих од 10 000 који се могу формирати од цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5.

69) На колико различитих начина се може расподелити 5 дечака и 5 девојчица у биоскопском реду од 10 столица тако да два дечака не седе један до другог?

70) Од 50 људи у некој радној организацији бира се комисија од 9 чланова. Та комисија бира извршни орган од 3 члана. На колико различитих начина се може извршити целокупан избор?

71) Телефонски број у Новом Саду може бити петоцифрен или шестоцифрен и не сме почети цифрама 0,1 и 9. Колико различитих телефонских бројева може бити у Новом Саду?

72) Ако се регистарске таблице на аутомобилима састоје од 2 слова азбуке која има 30 слова и иза њих четвороцифреног броја (од 0000 до 9999), наћи број различитих таблица.

Изборни предмет: <u>МАТЕМАТИКА</u> питања за завршни испит

Низови

73) Збир прва три члана аритметичког низа је 36, а sбир њихових квадрата је 482. Одредити низ.

74) Аритметички низ има 20 чланова. Збир чланова на парним местима је 250, а збир чланова на непарним местима је 220. Одредити два средња члана низа.

75) Одредити х тако да бројеви $\log 2, \log\left(2^x - 1\right), \log\left(2^x + 3\right)$ буду узастопни чланови аритметичког низа.

76) Геометријска прогресија има паран број чланова. Збир чланова на непарним местима износи 85, а збир чланова на парним местима 170. Одреди количник.

77) Три броја , чији је збир 26 чине геометријски низ. Увећа ли се средњи члан за 4, добија се аритметички низ. Који су то бројеви?

78) Између бројева 3 и 18 су уметнута два броја. Прва три броја су прва три члана геометријског низа, а последња три прва три члана аритметичког низа. Који су то бројеви?

Стереометрија

79) Израчунати висину правилног тетраедра ако је његова ивица a .

80) Наћи запремину паралелопипеда чије су све странице ромбови странице a и оштрог угла 60^0

81) Површина омотача праве правилне тростране пирамиде и површина њене основе односе се као $\sqrt{3}:1$. Одредити косинус угла под којим је страна пирамиде нагнута према основи.

82) Површина дијагоналног пресека коцке је 2. Израчунати дијагоналу основе, ивицу, дијагоналу коцке, површину и запремину коцке.

83) Површина омотача праве пирамиде са квадратном основом износи 60cm^2. Одредити ивицу основе *a* и висину пирамиде *H*, ако им је однос 3 : 2, а висина бочне стране *h* = 5 *cm*.

84) Наћи запремину тела које се добија обртањем квадрата око своје средишње линије ако је страница *a* = 10 *cm*.

85) Површина омотача праве купе износи $60\pi cm^2$. Одредити полупречник *r* и висину купе *H* ако је однос полупречника *r* и бочне ивице *s* 3 : 5.

86) Одредити запремину тела које се добија обртањем квадрата око дијагонале, ако је страница квадрата *a* = 10 *cm*.

87) Површина омотача правог ваљка износи $80\pi cm^2$. Одредити полупречник *r* и висину *H*, ако им је однос 2 : 5.

88) У једнакостраничан троугао чија је страница $a = 6\sqrt{3}cm$ уписан је круг. Ако ова фигура ротира око висине троугла наћи однос запремина ротационих тела, добијених ротацијом троугла и круга.

89) Једнакостранични троугао *ABC* ротира око праве која садржи тачку *A*, а паралелна је са страницим *BC*. Израчунати површину и запремину тако насталог ротационог тела ако је *BC = a.*

90) У правом кружном конусу однос полупречника основе и његове висине је 5 : 12. Колики је централни угао кружног исечка који се добија раивијањем омотача конуса? Наћи површину и запремину тог конуса ако је полупречник основе 1.

91) Две сфере чији су полупречници r_1 = 4 и r_2 = 8 додирују се споља. Израчунати запремину праве купе описане око њих, чијој висини припадају центри сфера.

92) Сфера S_1 полупречника r_1 уписана је у коцку ивице 1, а сфера S_2 полупречника r_2 је описана око те коцке. Наћи збир $r_1^2 + r_2^2$.

93) Израчунати површину појаса лопте полупречника 65 ако су полупречници граничних кругова појаса 33 и 25.

Изборни предмет: <u>МАТЕМАТИКА</u> питања за завршни испит

<u>Вектори</u>

94) Ако су *D*, *E* и *F* редом средине страница *BC, CA* и *AB* троугла *ABC*, доказати векторске једнакости: $a)\ \ 2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{FC}$, $\ \ b)\ \ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

95) У четвороуглу *ABCD* тачке *M,P,N* и *Q* су редом средине странаница *AB, BC, CD* и *DA*. Доказати да је $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{DB}$.

96) Показати да су вектори $\vec{a}=(-1,1,1)$, $\vec{b}=(2,0,0)$ и $\vec{c}=(0,1,1)$ линеарно зависни. Наћи линеарну зависност датих вектора. Разложити вектор $\vec{c}$ по векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

97) Ако су *A*(1,-1,2), *B*(1,2,3) и *C*(-1,0,1) три темена паралелограма, одредити четврто теме.

98) Одредити $m \in R$ тако да вектори $\vec{a}=2\vec{i}+m\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$ буду међусобно нормални.

99) Наћи угао између вектора $\vec{a}=2\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}\sqrt{3}$.

100) Дати су вектори $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$ где је $|p|=|q|=2$ и $\angle(p,q)=\frac{\pi}{3}$.

а) Израчунати површину паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$

б) Испитати да ли су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нормални.

в) Израчунати интензитет вектора $\vec{a}$.

101) Доказати да је Δ *ABC* са теменима *A*(2,4,5), *B*(-3,2,2) и *C*(-1,0,3) правоугли.

102) Наћи површину паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a}=(1,1,-1)$ и $\vec{b}=(2,-1,2)$.

103) Дат је Δ *ABC* са теменима *A*(2,-3,4), *B*(1,2,-1) и *C*(3,-2,1). Наћи висину троугла h_c из темена А на страницу *BC*.

104) Доказати да тачке *A*(1,2,-1), *B*(0,1,5), *C*(-1,2,1) и *D*(2,1,3) припадају истој равни.

105) Дат је тетраедар са теменима *A*(1,0,1), *B*(-1,1,0), *C*(0,1,1) и *D*(-1,0,1). Наћи запремину *V* тетраедра, као и висину *H* из темена *A* на страну *BCD*.

<u>Аналитичка геометрија</u>

106) Дата су темена троугла A(-5,-2), B(7,6), C(5,4). Одредити:

а) једначину странице AB

б) једначину висине из темена C

в) угао код темена A

107) Из координатног почетка повучене су тангенте на кружницу $x^2+y^2-6x-4y+9=0$. Наћи њихове једначине и угао између њих.

108) Одреди *k* тако да права $y+x+k=0$, буде тангента елипсе $2x^2+3y^2=30$.

109) Написати једначину хиперболе ако су познате једначине њених тангенти:

$5x-7y-1=0$, $x-y-1=0$.

110) Одредити угао под којим се секу криве $3x^2+4y^2=84$, $3x^2-4y^2=12$.

111) Наћи оне тангенте параболе $y^2=12x$ које са правом $y=3x-4$ граде угао $\frac{\pi}{4}$.

Изборни предмет: <u>МАТЕМАТИКА</u> питања за завршни испит

<u>Функције</u>

112) Ако је $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=(x-1)^2$, колико је $f(3)$?

113) Решити систем функционалних једначина:

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right)-2g\left(\frac{x-1}{x}\right)=x-2 \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+g\left(\frac{x-1}{x}\right)=x+1 \end{aligned}\right\}$$

114) Ако је $f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=\frac{x-3}{3x+4}$, наћи $f^{-1}(x)$.

115) Дата је функција $f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ Одредити $f^{-1}(x)$.

116) Израчунати $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{5x}-5}$.

117) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

118) Израчунати $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2x-1}-1}$.

119) Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+4}{x^2+2x-1}\right)^{-\frac{2x+1}{5}}$.

120) Израчунати $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-8x^2+16}{x^3-2x^2-4x+8}$.

121) Одредити асимптоте функције $f(x)=\frac{2x^3-1}{x^2-4}$.

122) Одредити асимптоте функције $f(x)=\frac{2x^3-1}{x^2-4}$.

123) Наћи први извод функције: $f(x)=\frac{tgx-ctgx}{tgx+ctgx}$.

124) Наћи први извод функције: $f(x)=\frac{1}{6}\ln\frac{x^3-1}{x^3+1}$.

125) Наћи први извод функције: $f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$.

126) Испитати монотоност и конвексност и наћи екстремне врдности функције $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$

127) Ако је $y=x+\sqrt{x^2+1}$ доказати да важи $(1+x^2)y''+xy'-y=0$.

128) Нацртати график функције: $y=\frac{x^2-4x+4}{x-1}$.

Изборни предмет: <u>МАТЕМАТИКА</u>   питања за завршни испит

<u>НАПОМЕНА:</u> На матурском испиту ученик извлачи цедуљу на којој се налазе три питања. За прелазну оцену је потребно урадити најмање половину од задатог.

СРЕЋНО!!!